

Ключи к заданиям 11 класса

1. Школьник Константин массой 60 кг находится на расстоянии 1 м от мягкого и удобного дивана массой 120 кг и на расстоянии 5 км от школы массой 2000 тонн. Константин представил себя свободно летящим космонавтом и задумался — а если бы вокруг не было ни Земли, ни других тяжёлых небесных тел, что бы его притягивало сильнее — диван или школа? Определите силы гравитационного притяжения школьника к дивану и к школе. Что притягивает школьника сильнее и во сколько раз?

Решение

Сила гравитационного притяжения рассчитывается по формуле

$$F = Gm_1m_2/R^2 \quad (2 \text{ балла})$$

Подставляем значения и получаем:

- Диван: $F_d = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 60 \cdot 120 / 1^2 = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ (2 балла)
- Школа: $F_{ш} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 60 \cdot 2000000 / 5000^2 = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ Н}$. (2 балла)

Отношение сил притяжения:

$$F_d / F_{ш} = 4,8 \cdot 10^{-7} / 3,2 \cdot 10^{-10} = 1500 \quad (2 \text{ балла}).$$

Диван притягивает школьника в 1500 раз сильнее, чем школа.

Критерии оценивания.

Этап 1 (2 балла). Запись формулы закона всемирного тяготения.

При любых ошибках а этом этапе, если формула записана неверно, общее количество баллов за задачу не может превышать 2.

Этап 2 (4 балла). Вычисление значений сил гравитационного приближения — по 2 балла за каждый случай.

Арифметические ошибки или ошибки в переводе единиц измерения зануляют оценку за конкретные вычисления, но вычисление для другого случая оценивается в полной мере (ошибка в вычислениях случая «диван» не влияет на оценивание случая «школа», и наоборот).

Этап 3 (2 балла). Вычисление отношения сил и итоговый вывод.

Допустимо также считать обратное отношение $F_{ш} / F_d = 6,7 \cdot 10^{-4}$, оценка не снижается.

Итоговый вывод (что диван притягивает сильнее школы) допускается напрямую не формулировать, если из рассчитанного отношения сил он непосредственно следует.

При неверных вычислениях на предыдущих этапах, приводящих, тем не менее, к верному выводу $F_d > F_{ш}$, за этот этап может быть поставлен 1 балл.

Если в решении приведён только верный ответ без какого-либо обоснования, за задачу ставится 1 балл.

2. Астрономы предполагают, что примерно через 30-50 миллионов лет спутник Марса Фобос, обращающийся сейчас вокруг Марса на расстоянии 9380 км по почти круговой орбите, из-за приливных сил распадется на пылинки и сформирует кольцо. Считая диаметр пылинки равным 1 мм, кольцо тороидальным (в виде «бублика»), а толщину будущего кольца около 100 км, оцените концентрацию пылинок в этом кольце. Современный Фобос можно считать шаром с радиусом 10 км. Считайте, что кольцо сформируется на текущей орбите Фобоса.

Решение

Определим количество пылинок. Радиус пылинки в $10 \text{ км} / 0,5 \text{ мм} = 2 \cdot 10^7$ раз меньше радиуса Фобоса, значит, Фобос распадется на $N = (2 \cdot 10^7)^3 = 8 \cdot 10^{21}$ пылинок **(2 балла)**. Область пространства, которое они займут — это тор (бублик) с радиусом оси, равным радиусу круговой орбиты Фобоса (9380 км) и толщиной 100 км, то есть внутренний радиус сечения тора равен 50 км. **(2 балла)**

Объем тора равен

$$V = 2\pi R_0 \cdot \pi r^2 = 4,6 \cdot 10^8 \text{ км}^3. \text{ (2 балла)}$$

То есть концентрация пылинок равна

$$n = N / V = 8 \cdot 10^{21} / 4,6 \cdot 10^8 = 1,74 \cdot 10^{13} \text{ шт} / \text{км}^3 = 17400 \text{ шт} / \text{м}^3. \text{ (2 балла)}$$

Критерии оценивания.

Этап 1 (2 балла). Определение количества пылинок.

Вычисления также могут проводиться более сложным способом — прямым определением объема Фобоса, объема пылинки и их отношения. В случае верного ответа такой способ оценивается в полной мере.

Арифметические погрешности в ответе, не превышающие 10% от правильного ответа, не приводят к снижению балла. Более существенные арифметические погрешности забирают балл за этап, однако последующие этапы оцениваются в полной мере.

Если при вычислениях получились очевидно неразумные ответы, обзая оценка за задачу не может превышать 2 баллов.

Этап 2 (4 балла). Определение объема пространства, занятого пылинками.

При этом 2 балла ставятся за верное описание области пространства либо за правильную формулу (объем тора с радиусом оси, равным радиусу орбиты, и внутренним радиусом сечения, равным 50 км).

Еще 2 балла ставятся за верные вычисления с допустимой погрешностью не более 10% от верного значения.

Допустимы альтернативные оценки объема пространства — если они астрономически разумны и приводят к ответу в пределах 10% от правильного, они оцениваются в полном объеме (4 балла).

Этап 3 (2 балла). Определение концентрации пылинок.

Ответ может быть посчитан и записан в любой системе единиц (шт/м³, шт/см³, ...).

При содержательно правильном ответе это не влияет на оценку этапа.

Оценка за этап ставится только при получении правильного ответа с отклонением $\pm 10\%$, при непадании в эти пределы оценка за последний этап — 0 баллов.

3. Астроном Юрий, поглядев в вечернее октябрьское небо, с удивлением заметил невысоко над горизонтом два одинаково ярких объекта. Один объект оказался планетой Венера, а второй — взлетающим самолётом. Оцените мощность прожектора самолёта, если Венера в тот вечер имела звёздную величину -4^m , а расстояние до аэропорта, откуда взлетал самолёт, 15 км.

Решение

Если объекты имеют одинаковую видимую яркость (блеск), то звёздная величина прожектора самолёта тоже равна -4^m . (1 балл)

Определим освещённость, создаваемую объектом со звёздной величиной -4^m . Для этого по закону Погсона сравним его с известным нам объектом — Солнцем ($m = -26,78^m$, $E_c = 1360 \text{ Вт/м}^2$):

$$E_4 / E_c = 2,512^{-26,78 - (-4)} \quad (1 \text{ балл})$$

$$E_4 = 1360 \cdot 2,512^{-22,78} = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2. \quad (2 \text{ балла})$$

Теперь из закона обратных квадратов можем определить мощность (светимость) прожектора. Учитываем, что прожектор светит только «вперёд» по ходу самолёта, поэтому вместо выражения $4\pi D^2$ в законе нужно записать площадь полусферы — $2\pi D^2$ (1 балл):

$$L / 2\pi D^2 = E_4 = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2 \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Отсюда } L = E_4 \cdot 2\pi D^2 = 1500 \text{ Вт}. \quad (2 \text{ балла})$$

Критерии оценивания.

Этап 1 (4 балла) Определение освещённости от прожектора самолёта.

1 балл ставится за соображение о равенстве звёздных величин Венеры и самолёта.

Это утверждение может не фигурировать в решении явно, но если в расчётах в качестве звёздной величины самолёта берётся значение -4^m , балл ставится.

1 балл ставится за верную запись закона Погсона. При этом допустимо сравнивать самолёт с любыми известными участнику объектами, необязательно упомянутыми в справочных данных (например, с Вегой, $m=0^m$). Такие решения при правильной полученной величине оцениваются в полном объёме.

2 балла ставятся за верное (погрешность не более 10%) вычисление величины освещённости. При арифметических ошибках или ошибках в переводе единиц измерения эти 2 балла не ставятся, но остальные этапы оцениваются независимо и в полной мере, если не приводят к астрономически неразумным ответам.

Этап 2 (4 балла). Определение мощности прожектора.

2 балла ставятся за верную запись закона обратных квадратов, при этом, если участник считает, что прожектор светит «в полную сферу», а не в полусферу, и получает ответ в 2 раза больший, ему вместо 2 баллов здесь ставится 1 балл, а последующие вычисления оцениваются в полной мере (общая оценка за задачу — не более 7 баллов).

2 балла — за верные вычисления, приводящие к ответу с погрешностью не более 10%. В случае расчётов для «полной сферы» при верных вычислениях эти 2 балла также присуждаются (ответ в этом случае — 3000 Вт с погрешностью не более 10 %).

Участник имеет право проводить этапы вычислений не в указанном порядке, либо объединить все выражения в единую формулу, и только затем определить численный ответ. Эти варианты решения при условии правильного их выполнения не должны приводить к снижению баллов.

4. Сверхмассивная черная дыра в центре галактики М87 имеет радиус Шварцшильда около 20 миллиардов километров. Радиус «тени» этой черной дыры примерно в 2,6 раза больше радиуса Шварцшильда. Расстояние до М87 около 55 миллионов световых лет. Каким должен быть диаметр гипотетического радиотелескопа, чтобы с его помощью мы имели шанс различить (разрешить) «тень» этой черной дыры? Наблюдения ведутся на частоте 231 ГГц. Влиянием атмосферы пренебрегите.

См. задачу № 5 в комплекте для 10 класса.

5. В момент верхней кульминации звезды Бетельгейзе путник Борис выехал из Новосибирска ($55,0^\circ$ с.ш., $83,0^\circ$ в.д.) в Томск ($56,5^\circ$, $85,0^\circ$ в.д.). Считая, что он двигался по прямой со скоростью 60 км/ч, определите с точностью до минут, сколько времени путнику придётся ждать в Томске новой верхней кульминации звезды Бетельгейзе? Изменением уравнения времени и искривлением поверхности Земли на расстоянии от Новосибирска до Томска можно пренебречь.

Решение

Определим расстояние от Новосибирска до Томска по прямой по теореме Пифагора. Для этого вспомним (или вычислим), что один градус по меридиану соответствует расстоянию 111 км (1 балл), а по параллели — $111 \text{ км} \cdot \cos \varphi = 62 \text{ км}$ (1 балл).

Здесь в качестве широты допустимо брать 55° , $56,5^\circ$ либо какое-либо среднее значение, ответ от этого не слишком поменяется.

$D^2 = (1,5^\circ \cdot 111 \text{ км})^2 + (2^\circ \cdot 62 \text{ км})^2$ (1 балл), откуда $D = 207,6 \text{ км}$.

Соответственно, Борис добирался из Новосибирска в Томск в течение $207,6/60 = 3,46$ часа = 3 часа 28 минут. (1 балл)

Если бы Борис остался на месте или двигался бы строго по меридиану (на север или на юг), до следующей верхней кульминации Бетельгейзе прошло бы 23 часа 56 минут — звёздные сутки (1 балл), и ему осталось бы ждать 20 часов 28 минут.

Но у Бориса поменялась долгота, и, поскольку он теперь восточнее, чем был, для него верхняя кульминация Бетельгейзе наступит раньше. Определим, на какое время.

Смещение на 2° на восток соответствует сдвигу местного звёздного времени на $2/360 = 1/180$ звёздных суток в сторону увеличения.

$1/180 \cdot 23 \text{ ч } 56 \text{ м} = 8 \text{ минут}$. (2 балла)

Итоговый ответ — Борису придётся ждать 20 часов 20 минут. (1 балл)

Критерии оценивания.

Этап 1 (4 балла). Вычисление расстояния и времени путешествия

1 балл ставится за вычисление или постулирование длины одного градуса по меридиану (111 км).

1 балл ставится за вычисление длины одного градуса по параллели. Здесь в качестве широты допустимо брать 55° , $56,5^\circ$ либо какое-либо среднее значение, ответ от этого не слишком поменяется. Допустимые ответы — от 60 до 64 км. Если ответ выбивается за пределы этого диапазона, но остаётся в пределах 50-70 км, этот балл не ставится, но дальнейшие пункты оцениваются в полной мере. При других значениях, в том числе при значении 111 км, баллы за дальнейшее решение ставятся только за формульные записи, все численные ответы оцениваются в 0 баллов (максимальная оценка за задачу — 4 балла).

1 балл ставится за запись теоремы Пифагора для вычисления расстояния между Новосибирском и Томском (независимо от полученных ранее численных значений).

1 балл ставится за вычисление времени пути, допустимая погрешность - ± 2 минуты.

Этап 2 (4 балла). Вычисление промежутка времени между кульминациями

1 балл ставится за утверждение о том, что интервал времени между кульминациями для неподвижного наблюдателя равен звёздным суткам. Утверждение может не быть сформулировано явно, но использоваться в дальнейших формулах в виде величины «23 часа 56 минут», в таком случае балл ставится.

1 балл ставится за формулу связи сдвига по долготе и сдвига времени кульминации, независимо от численных результатов на прошлых этапах.

1 балл ставится за численный результат сдвига звёздного времени (8 минут). Допустимая погрешность отсутствует, при любом другом ответе этот балл не ставится.

1 балл ставится за верный итоговый ответ с максимальной погрешностью ± 2 минуты

Участник имеет право проводить этапы вычислений не в указанном порядке, либо объединить все выражения в единую формулу, и только затем определить численный ответ. Эти варианты решения при условии правильного их выполнения не должны приводить к снижению баллов.

6. На звёздной карте (см. второй лист) примерно отмечены четыре точки, являющихся радиантами метеорных потоков. Напишите названия созвездий (на русском или сокращениями по Байеру), в которых расположены эти точки. Перечислите названия этих потоков в порядке приведённой нумерации.

Решение

На карте легко находится ковш Большой Медведицы, а по нему известным способом определяется Полярная звезда и Малая Медведица, где и отмечен первый радиант.

Между Большой и Малой Медведицами расположено созвездие Дракона — второй радиант. Далее, по летне-осеннему треугольнику, или по характерной форме, либо другим способом, определяется созвездие Лиры — третий радиант.

Четвёртый радиант, расположенный в созвездии Персея, определить можно, заметив, что рядом находится характерная буква W — созвездие Кассиопеи.

Итого — радианты потоков отмечены в созвездиях Малая Медведица (1), Дракон (2), Лира (3) и Персей (4). Соответственно, названия потоков можно определить (или

угадать), даже не зная их изначально — по известным латинским названиям этих созвездий: Урсиды (1), Дракониды (2), Лириды (3) и Персеиды (4).

Критерии оценивания

Поскольку способов ориентации на звёздном небе очень много, в данной задаче от участников не требуется обоснований полученных ответов.

За каждое верно определённое созвездие — +1 балл, за каждое верно написанное название потока — +1 балл. За отсутствие ответа или за неверный ответ баллы не снимаются.

Созвездия могут быть записаны или русскими названиями, как в решении выше, либо каталожными обозначениями (UMi, Dra, Lyr, Per). Описки и погрешности в именовании, позволяющие, тем не менее, однозначно определить (верное) созвездие, не штрафуются.

За ответ «Медведица» без указания, к какому именно из двух созвездий он относится, балл не ставится.

Названия потоков должны быть достаточно точные, то есть, например, ответ «метеорный поток в Лире» правильным не считается.

Карта звёздного неба к задаче № 6.

